DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

Integrali indefiniti

DEFINIZIONE DI INTEGRALE INDEFINITO

Le primitive

Vogliamo ora affrontare il problema inverso della derivazione: data una funzione, esiste una funzione la cui derivata sia uguale alla funzione data? Per esempio, data $f(x) = 2x$, ci chiediamo se esiste una funzione $F(x)$ la cui derivata è $2x$. Se consideriamo $F(x) = x^2$, si ha che $F'(x) = 2x$. Una funzione di questo tipo viene detta *primitiva* di $f(x)$.

DEFINIZIONE

Primitiva di una funzione

Una funzione $F(x)$ si dice primitiva della funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $[a; b]$ se $F(x)$ è derivabile in tutto $[a; b]$ e la sua derivata è $f(x)$:

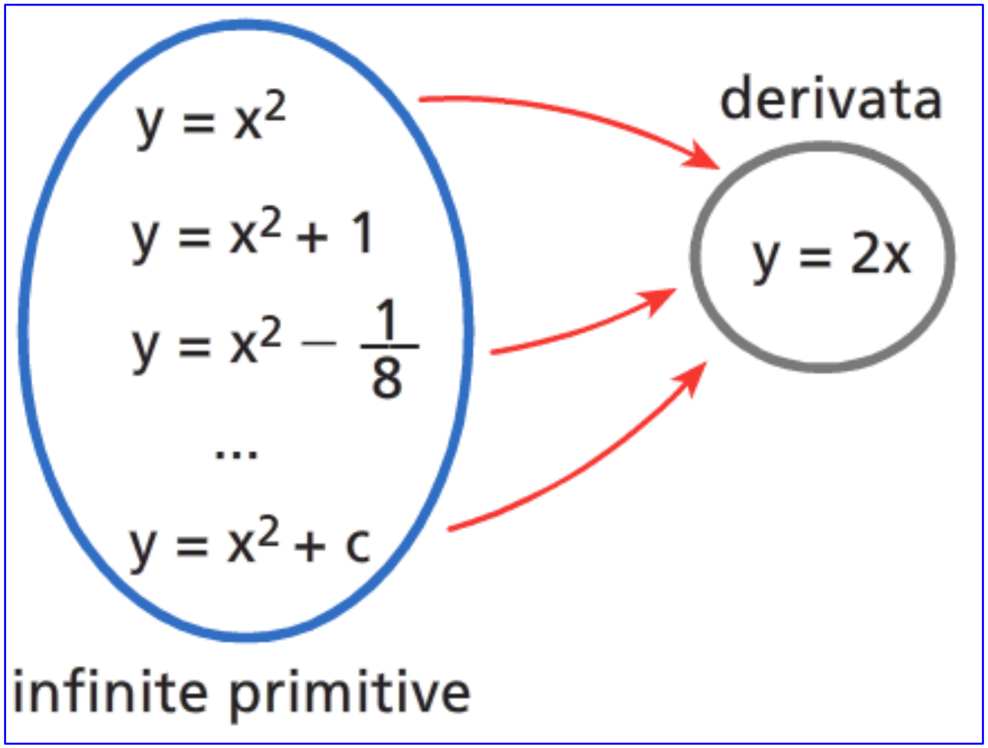
$$F'(x) = f(x).$$

ESEMPIO

Data la funzione $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$, la funzione $F(x) = -3 \cos x$ è una primitiva di $f(x)$ perché:

$$F'(x) = 3 \operatorname{sen} x = f(x).$$

La primitiva di una funzione, se esiste, non è unica. Poiché $F(x) = x^2$ ha come derivata $2x$, allora x^2 è una primitiva di $2x$. Osserviamo però che anche $x^2 + 1$, $x^2 - \frac{1}{8}$ e in generale $x^2 + c$ (con c costante reale) hanno come derivata $2x$, quindi esistono infinite primitive di $2x$.



◀ **Figura 1** Ogni funzione del tipo $y = x^2 + c$ ha per derivata $2x$, quindi è una primitiva di $y = 2x$.

In generale, se una funzione $f(x)$ ammette una primitiva $F(x)$, allora ammette infinite primitive del tipo $F(x) + c$, con c numero reale qualunque. Infatti, poiché la derivata di una costante è nulla:

$$D[F(x) + c] = F'(x) = f(x), \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Viceversa, se due funzioni $F(x)$ e $G(x)$ sono primitive della stessa funzione $f(x)$, allora le due funzioni differiscono per una costante,

$$D[F(x) - G(x)] = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

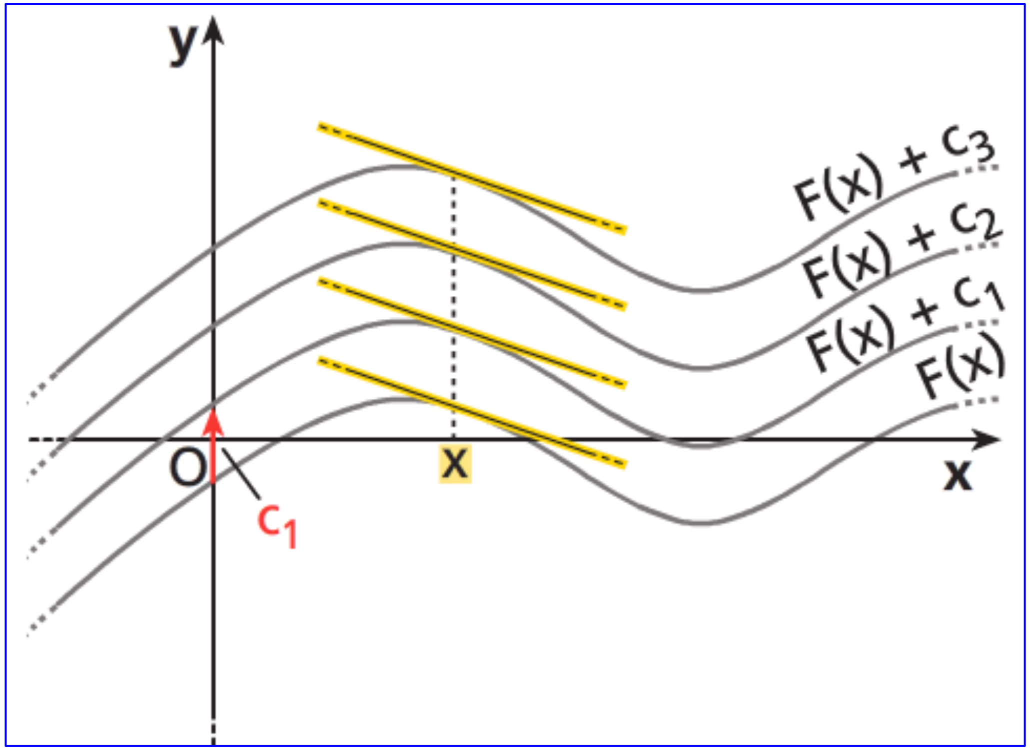
e perciò

$$F(x) - G(x) = c.$$

Concludiamo quindi che:

se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora le funzioni $F(x) + c$, con c numero reale qualsiasi, sono **tutte** e **sole** le primitive di $f(x)$.

Poiché tutte le primitive di una funzione $f(x)$ sono funzioni del tipo $F(x) + c$, geometricamente sono rappresentate da infinite curve piane ottenute dal grafico di $F(x)$ mediante una traslazione verticale di vettore $\vec{v}\,(0; c)$; a ogni valore di c corrisponde una curva.



◀ Figura 2 Funzioni i cui grafici sono traslati di un vettore del tipo $(0; c)$. Tutte le funzioni hanno la stessa derivata perché nei punti con la stessa ascissa hanno tangente parallela.

L'integrale indefinito

Riprendiamo l'esempio della funzione $f(x) = 2x$. Diamo all'insieme delle sue primitive $x^2 + c$, con c numero reale qualunque, il nome di *integrale indefinito* di $f(x) = 2x$ e usiamo questa scrittura:

$$\int 2x\, dx = x^2 + c$$

DEFINIZIONE

Integrale indefinito

Si chiama integrale indefinito della funzione $f(x)$, e si indica con $\int f(x)\, dx$, l'insieme di tutte le primitive $F(x) + c$ di $f(x)$, con c numero reale qualunque.

$$\int f(x)\, dx = \underline{F(x) + c}$$

$$D[F(x) + c] = f(x)$$

Nella scrittura $\int f(x)\ dx$ la funzione $f(x)$ è detta **funzione integranda** e la variabile x **variabile di integrazione**.

ESEMPIO

L'integrale indefinito di $\cos x$ è l'insieme delle primitive di $\cos x$, cioè $\operatorname{sen} x + c$. Scriviamo:

$$\int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x + c\,.$$

$$\int \cos x\ dx = \underline{\operatorname{sen} x + c}$$

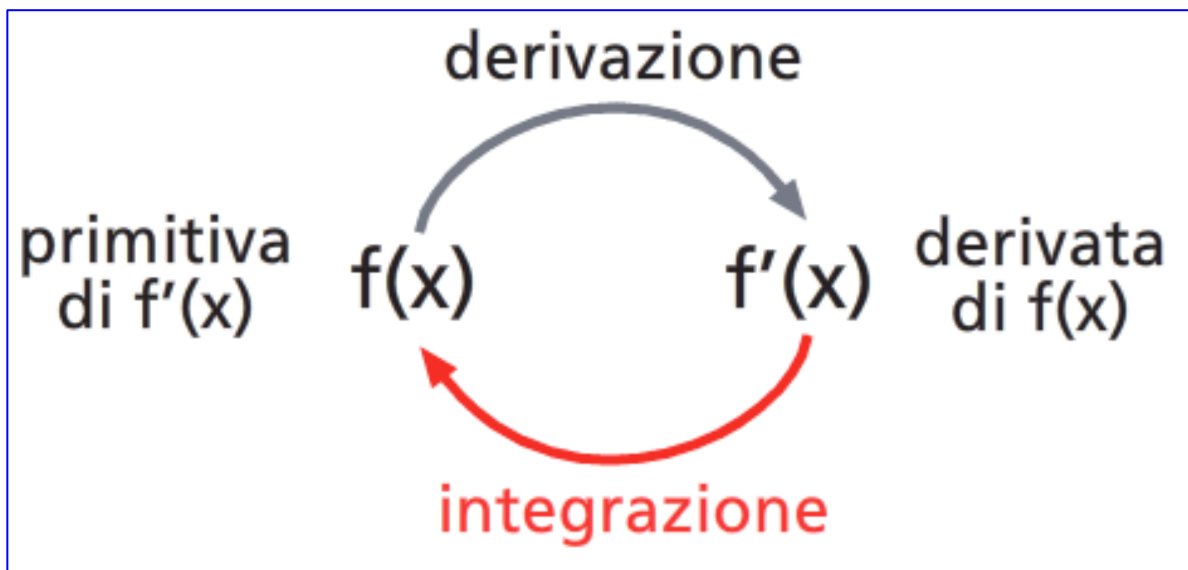
$$D[\operatorname{sen} x + c] = \cos x$$

- Dalla definizione precedente, poiché

  $$DF(x) = f(x),$$

segue che $D\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$.

Questo significa che l'integrazione indefinita agisce come operazione inversa della derivazione.



Una funzione che ammette una primitiva (e quindi infinite primitive) si dice **integrabile**.
Quali sono le funzioni integrabili? Si può dimostrare che è valido il seguente teorema.

TEOREMA

Condizione sufficiente di integrabilità

Se una funzione è continua in $[a; b]$, allora ammette primitive nello stesso intervallo.

Sappiamo invece che non sempre una funzione continua è derivabile. Per esempio, ci sono funzioni continue con punti angolosi, e in tali punti non sono derivabili.

Tuttavia, non è sempre facile determinare primitive anche di funzioni continue abbastanza semplici. Per esempio, l'integrale $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$, con $x \neq 0$, non è calcolabile con i metodi che esamineremo in questo capitolo.

Le proprietà dell'integrale indefinito

PROPRIETA

Prima proprietà di linearità

L'integrale indefinito di una somma di funzioni integrabili è uguale alla somma degli integrali indefiniti delle singole funzioni:

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

Infatti, se deriviamo entrambi i membri, otteniamo rispettivamente:

$$D\left[\int [f(x) + g(x)]\, dx\right] = f(x) + g(x);$$

$$D\left[\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx\right] = D\left[\int f(x)\, dx\right] + D\left[\int g(x)\, dx\right] = f(x) + g(x).$$

I due membri hanno la stessa derivata, quindi rappresentano le primitive della stessa funzione.

ESEMPIO

$$\int (3x^2 + \cos x)\, dx = \int 3x^2\, dx + \int \cos x\, dx = x^3 + c_1 + \operatorname{sen} x + c_2.$$

Si è soliti scrivere una sola costante $c = c_1 + c_2$, per non appesantire la notazione. Pertanto:

$$\int (3x^2 + \cos x)\, dx = x^3 + \operatorname{sen} x + c.$$

PROPRIETÀ

Seconda proprietà di linearità

L'integrale del prodotto di una costante per una funzione integrabile è uguale al prodotto della costante per l'integrale della funzione:

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx.$$

Infatti, se deriviamo entrambi i membri, otteniamo rispettivamente:

$$\mathrm{D}\left[\int k \cdot f(x)\, dx\right] = k \cdot f(x); \quad \mathrm{D}\left[k \cdot \int f(x)\, dx\right] = k\mathrm{D}\left[\int f(x)\, dx\right] = k \cdot f(x).$$

I due membri hanno la stessa derivata, quindi rappresentano le primitive della stessa funzione.

ESEMPIO

$$\int 4\cos x\, dx = 4 \cdot \int \cos x\, dx = 4\,\mathrm{sen}\, x + c.$$

- Le proprietà di linearità si possono esprimere in un'unica formula:

$$\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\, dx = c_1 \int f(x)\, dx + c_2 \int g(x)\, dx.$$

Si dice anche che **l'integrale è un operatore lineare.**

- Non esistono proprietà riguardanti l'integrale di un prodotto o di un quoziente di funzioni, quindi è necessario studiare per tali casi altri metodi risolutivi.

- Occorre ricordare sempre che, in generale,

$$\int f(x)\, g(x)\, dx \neq$$

$$\neq \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx \text{ e}$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx \neq \frac{\int f(x)\, dx}{\int g(x)\, dx}$$

INTEGRALI INDEFINITI IMMEDIATI

L'integrale di x^α, con $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\boxed{\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ con } \alpha \neq -1}$$

Infatti, derivando, abbiamo $D\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\right] = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1)\, x^{\alpha+1-1} = x^\alpha$

ESEMPIO

$\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + c$. Infatti, derivando, abbiamo: $\mathrm{D}\left[\frac{x^3}{3} + c\right] = \frac{3x^{3-1}}{3} = x^2$

Casi particolari

- $\int dx = x + c$; infatti $\int dx = \int 1 \, dx = \int x^0 \, dx = x + c$
- $\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c$;

- $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$;

infatti $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$.

ESEMPIO

1. Calcoliamo $\int (2x^5 - 4x + 3)\, dx$. Applichiamo la prima proprietà di linearità:

$$\int (2x^5 - 4x + 3)\, dx = \int 2x^5\, dx - \int 4x\, dx + \int 3\, dx.$$

Applichiamo la seconda proprietà di linearità:

$$\int 2x^5\, dx - \int 4x\, dx + \int 3\, dx = 2 \cdot \int x^5\, dx - 4 \cdot \int x\, dx + 3 \cdot \int dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^6}{6} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot x + c = \frac{x^6}{3} - 2x^2 + 3x + c.$$

2. Calcoliamo $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$. Scriviamo

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}},$$

quindi:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + c = 2 \cdot \sqrt{x} + c.$$

L'integrale di $\frac{1}{x}$

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c}$$

Infatti $D[\ln|x| + c] = \dfrac{1}{x}$ perché:

se $x > 0$, $D\ln|x| = D\ln x = \dfrac{1}{x}$;

se $x < 0$, $D\ln|x| = D\ln(-x) = \dfrac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$

ESEMPIO

Calcoliamo $\int \frac{3x^2+2}{x}\,dx$.

$$\int \frac{3x^2+2}{x}\,dx = \int\left(3x+\frac{2}{x}\right)dx =$$

$$= 3\int x\,dx + 2\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{3}{2}x^2 + 2\ln|x| + c$$

L'integrale della funzione esponenziale

$$\boxed{\int e^x\,dx = e^x + c}$$

infatti $D[e^x + c] = e^x$

$$\boxed{\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + c}$$

infatti $D\left[\frac{1}{\ln a} \cdot a^x + c\right] = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x$

ESEMPIO

Calcoliamo $\int(2e^x + 5^x)\,dx$.

Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int(2e^x + 5^x)\,dx = 2\int e^x\,dx + \int 5^x\,dx = 2e^x + \frac{1}{\ln 5}\cdot 5^x + c$$

L'integrale delle funzioni seno e coseno

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$$

infatti $D[-\cos x + c] = -(-\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$$

infatti $D[\operatorname{sen} x + c] = \cos x$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$$

infatti $D[\operatorname{tg} x + c] = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$\boxed{\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = -\operatorname{cotg} x + c}$$

infatti $D[-\operatorname{cotg} x + c] = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

ESEMPIO

Calcoliamo $\displaystyle\int \left(3 \operatorname{sen} x - \frac{4}{\cos^2 x}\right) dx$.

Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int \left(3 \operatorname{sen} x - \frac{4}{\cos^2 x}\right) dx = 3 \int \operatorname{sen} x \, dx - 4 \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$= 3 \cdot (-\cos x) - 4 \cdot \operatorname{tg} x + c = -3 \cos x - 4 \operatorname{tg} x + c.$$

L'integrale delle funzioni le cui primitive sono le funzioni goniometriche inverse

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + c$$

Poiché $D[\operatorname{arcsen} x] = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- Utilizzando invece l'arcocoseno:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos x + c.$$

- Utilizzando invece l'arcocotangente:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\int -\frac{1}{1+x^2}\,dx = -\operatorname{arccotg} x + c.$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$$

Poiché $D[\operatorname{arctg} x] = \dfrac{1}{1+x^2}$

ESEMPIO

Calcoliamo $\int\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{7}{1+x^2}\right)dx$.

Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{7}{1+x^2}\right)dx = 2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 7\int\frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= 2\arcsin x + 7\arctan x + c.$$

L'integrale delle funzioni la cui primitiva è una funzione composta

$$\int [f(x)]^{\alpha} f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \text{con } \alpha \neq -1$$

Infatti: $$D\left[\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] =$$

$$= [f(x)]^{\alpha} \cdot f'(x).$$

Si procede analogamente anche per calcolare integrali di altre funzioni composte riconducibili a regole di integrazione diverse:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln \left| f(x) \right| + c \quad \Rightarrow \quad D[\ln|f(x)|] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c \quad \Rightarrow \quad D[e^{f(x)}] = f'(x)\, e^{f(x)}$$

$$\int f'(x)\, a^{f(x)}\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c \quad \Rightarrow \quad D\left[\frac{a^{f(x)}}{\ln a}\right] = f'(x)\, a^{f(x)}$$

$$\int f'(x) \operatorname{sen} f(x)\, dx = -\cos f(x) + c \quad \Rightarrow \quad D[-\cos f(x)] = = f'(x) \operatorname{sen} f(x).$$

$$\int f'(x) \cos f(x)\, dx = \operatorname{sen} f(x) + c \quad \Rightarrow \quad D[\operatorname{sen} f(x)] = = f'(x) \cos f(x).$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \mathrm{tg}\, f(x) + c} \Rightarrow \mathrm{D}[\mathrm{tg}\ f(x)] = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\mathrm{sen}^2 f(x)}\,dx = -\,\mathrm{cotg}\, f(x) + c} \Rightarrow \mathrm{D}[-\,\mathrm{cotg}\ f(x)] = = \frac{f'(x)}{\mathrm{sen}^2 f(x)}.$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \mathrm{arcsen}\, f(x) + c} \Rightarrow \mathrm{D}[\mathrm{arcsen}\ f(x)] = = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}.$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \mathrm{arctg}\, f(x) + c} \Rightarrow \mathrm{D}[\mathrm{arctg}\ f(x)] = = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}.$$

Le ultime due formule si possono generalizzare:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}\frac{f(x)}{|a|}+c}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{D}\left[\operatorname{arcsen}\frac{f(x)}{|a|}\right] = \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}.$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{f(x)}{a}+c.}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{D}\left[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{f(x)}{a}\right] = \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo i seguenti integrali.

1. $\int 3x^2(x^3+2)^2\,dx = \dfrac{(x^3+2)^3}{3} + c.$

2. $\int \operatorname{tg} x\,dx;\quad \int \operatorname{cotg} x\,dx.$

Scriviamo la tangente come rapporto fra seno e coseno e notiamo che, a meno del segno, il numeratore è la derivata del denominatore:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c.$$

Quindi $\boldsymbol{\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + c}$.

In modo simile si trova che: $\boldsymbol{\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + c}$.

ESEMPIO

Calcoliamo i seguenti integrali.

1. $\int 3x^2(x^3+2)^2\,dx = \dfrac{(x^3+2)^3}{3} + c.$

2. $\int \operatorname{tg} x\,dx; \qquad \int \operatorname{cotg} x\,dx.$

Scriviamo la tangente come rapporto fra seno e coseno e notiamo che, a meno del segno, il numeratore è la derivata del denominatore:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c.$$

Quindi $\boldsymbol{\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + c}$.

In modo simile si trova che: $\boldsymbol{\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + c}$.

3. $\int x \operatorname{sen} x^2 \, dx$.

Osserviamo che, a meno di una costante moltiplicativa, x è la derivata di x^2, argomento della funzione seno. Pertanto, moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\int x \operatorname{sen} x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int 2x \operatorname{sen} x^2 \, dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 + c.$$

4. $\int 2e^x \cos e^x \, dx = 2 \int e^x \cos e^x \, dx = 2 \operatorname{sen} e^x + c$.

5. $\int \frac{1}{1 + 4x^2} \, dx = \int \frac{1}{1 + (2x)^2} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{1 + (2x)^2} \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x + c$.

Riepilogo

Integrali immediati delle funzioni fondamentali	
$\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \text{con } \alpha \neq -1$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$
$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x \rvert + c$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$
$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + c$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$	$\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$

Integrali la cui primitiva è una funzione composta	
$\int [f(x)]^{\alpha} f'(x)\,dx = \dfrac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \text{con } \alpha \neq -1$	$\int \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \operatorname{tg} f(x) + c$
$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x) \rvert + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}\,dx = -\operatorname{cotg} f(x) + c$
$\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} f(x) + c$
$\int f'(x)\,a^{f(x)}\,dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$
$\int f'(x)\operatorname{sen} f(x)\,dx = -\cos f(x) + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} \dfrac{f(x)}{\lvert a \rvert} + c, \quad \text{con } a \neq 0$
$\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \operatorname{sen} f(x) + c$	$\int \dfrac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}\,dx = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg} \dfrac{f(x)}{a} + c, \quad \text{con } a \neq 0$

L'INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Quando l'integrale non è di risoluzione immediata può essere utile applicare il **metodo di sostituzione**, che consiste nell'effettuare un cambiamento di variabile che consenta di riscrivere l'integrale dato in una forma che sappiamo risolvere.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

- Poniamo $\sqrt{x} = t$, ossia $x = t^2$.
- Calcoliamo il differenziale: $dx = 2t\,dt$.
- Sostituiamo nell'integrale dato e calcoliamo l'integrale rispetto a t:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\,2t\,dt = 2\int \frac{t}{1+t}\,dt = 2\int \frac{t+1-1}{1+t}\,dt =$$

$$= 2\int dt - 2\int \frac{1}{t+1}\,dt = 2t - 2\ln|t+1| + c.$$

- Utilizzando la posizione iniziale, scriviamo il risultato in funzione di x:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + c.$$

Aggiungiamo e togliamo 1 al numeratore e poi scomponiamo la frazione in:

$$\frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1}.$$

Nella sostituzione abbiamo tolto il valore assoluto perché $\sqrt{x}+1$ ha valore sempre positivo.

Il metodo di sostituzione può essere utilizzato anche per calcolare l'integrale di una funzione composta nei casi già esaminati nel paragrafo precedente.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int 2x \cos x^2 \, dx$.

Essendo $Dx^2 = 2x$, possiamo utilizzare la regola vista nel paragrafo precedente:

$$\int 2x \cos x^2 \, dx = \operatorname{sen} x^2 + c.$$

● $\int f'(x) \cos f(x) \, dx =$
$= \operatorname{sen} f(x) + c.$

In alternativa, applichiamo il metodo di sostituzione.

- Poniamo $t = x^2$.
- Calcoliamo il differenziale: $dt = 2x \, dx$.
- Sostituiamo nell'integrale e risolviamo:

$$\int 2x \cos x^2 \, dx = \int \cos t \, dt = \operatorname{sen} t + c.$$

- Scriviamo il risultato in funzione di x:

$$\int 2x \cos x^2 \, dx = \operatorname{sen} x^2 + c.$$

In generale:

1. Sostituire la variabile d'integrazione x con un'altra variabile t legata alla x dalla relazione $x=g(t)$.
2. La funzione $g(t)$ deve essere derivabile e invertibile $t=g^{-1}(x)$.
3. Con queste condizioni la funzione integranda $f(x)$ diventa: $f(x)=f[g(t)]$ e il differenziale dx diventa: $dx=g'(t)dt$.

Formula dell'integrazione per sostituzione

$$\boxed{\int f(x) = \int f\left[g(t)\right]g'(t)dt}$$

L'INTEGRAZIONE PER PARTI

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ derivabili, con derivata continua, in un intervallo $[a; b]$, consideriamo la derivata del loro prodotto:

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Integriamo entrambi i membri:

$$\int D[f(x) \cdot g(x)]\, dx = \int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)]\, dx,$$

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\, dx + \int f(x) \cdot g'(x)\, dx.$$

Isolando $\int f(x) g'(x)\, dx$, otteniamo:

formula di **integrazione per parti**

$$\boldsymbol{\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx}$$

La formula è utile nei casi in cui la funzione integranda si può pensare come *prodotto di due fattori*.

$f(x)$ viene chiamato **fattore finito** e $g'(x)\, dx$ **fattore differenziale**.

Nell'applicazione della formula, una delle due funzioni, quella del fattore finito, viene soltanto derivata, mentre l'altra, quella del fattore differenziale, viene solo integrata. È quindi importante scegliere opportunamente i due fattori.

ESEMPIO

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ g'}}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{\ln x}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + c =$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + c.$$

Abbiamo scelto $x\,dx$ come fattore differenziale in quanto sappiamo calcolare la primitiva di x. Del fattore finito $\ln x$ sappiamo calcolare la derivata, che si semplifica con la primitiva di x, in modo da ottenere un integrale semplice da calcolare.

Al secondo membro della formula compare un altro integrale, quindi questo metodo di integrazione risulta utile se riusciamo a passare da un integrale più difficile a uno più facile da calcolare.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int x \operatorname{sen} x \, dx$.

Sappiamo calcolare sia la derivata sia la primitiva di entrambe le funzioni. La scelta migliore è quella di derivare x, perché l'integrale si semplifica:

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{x} \, \underset{\substack{\uparrow \\ g'}}{\operatorname{sen} x \, dx} = x(-\cos x) - \int -\cos x \, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + c.$$

Scegliamo x come fattore finito, e $\operatorname{sen} x \, dx$ come fattore differenziale.

Se scegliamo, invece, $\operatorname{sen} x$ come fattore finito, otteniamo:

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} x - \int \frac{x^2}{2} \cos x \, dx,$$

dove l'integrale a secondo membro è più complicato di quello di partenza.

In generale, negli integrali del tipo

$$\int x^n \operatorname{sen} x \, dx, \qquad \int x^n \cos x \, dx, \qquad \int x^n e^x \, dx$$

x^n si considera come fattore finito, mentre negli integrali del tipo

$$\int x^n \ln x \, dx, \qquad \int x^n \operatorname{arctg} x \, dx, \qquad \int x^n \operatorname{arcsen} x \, dx$$

$x^n \, dx$ si considera come fattore differenziale.
In particolare, negli integrali

$$\int \ln x \, dx, \qquad \int \operatorname{arctg} x \, dx, \qquad \int \operatorname{arcsen} x \, dx$$

si considera come fattore differenziale $x^0 \, dx$, ossia $1 dx$.

ESEMPIO

$$\boldsymbol{\int \ln x \, dx} = \int 1 \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \boldsymbol{x \ln x - x + c}.$$

Otteniamo così la regola di integrazione del logaritmo.

L'INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Affrontiamo in questo paragrafo il calcolo degli integrali di funzioni razionali fratte:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx,$$

dove il numeratore $N(x)$ e il denominatore $D(x)$ sono dei polinomi.
Nelle nostre considerazioni supporremo che il grado del numeratore sia minore del grado del denominatore perché, se ciò non accade, è sempre possibile eseguire la divisione del polinomio $N(x)$ per il polinomio $D(x)$, ottenendo un polinomio quoziente $Q(x)$ e un polinomio resto $R(x)$ di grado minore di quello di $D(x)$, cioè:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \quad \text{da cui}$$

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int \left[Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}\right]dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx$$

Considerati la divisione, $N(x) : D(x)$, il suo quoziente $Q(x)$ e il resto $R(x)$, è vero che: $N(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$, da cui, dividendo per $D(x)$, otteniamo la relazione che utilizziamo.

Nell'addizione dei due integrali, il primo è calcolabile in quanto è l'integrale di un polinomio; il secondo è l'integrale di una funzione razionale fratta con numeratore di grado inferiore al grado del denominatore.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\, dx$.

Il numeratore ha grado maggiore del denominatore.
Eseguiamo la divisione $(x^3 + 2x^2 + x + 1) : (x^2 + 1)$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +\,2x^2 & +\,x & +\,1 & x^2 + 1 \\
\cline{5-5}
-\,x^3 & & -\,x & & x + 2 \\
\cline{1-4}
 & 2x^2 & & +\,1 & \\
 & -\,2x^2 & & -\,2 & \\
\cline{2-4}
 & & & -\,1 &
\end{array}
$$

Quindi:

$$Q(x) = x + 2, \;\; R(x) = -\,1.$$

Il rapporto può essere scritto così:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = x + 2 + \frac{-1}{x^2 + 1}.$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\, dx = \int \left(x + 2 + \frac{-1}{x^2 + 1} \right) dx =$$

$$= \int x\, dx + 2 \int dx - \int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = \frac{x^2}{2} + 2x - \operatorname{arctg} x + c.$$

Studiamo quindi integrali del tipo $\int \frac{R(x)}{D(x)}\, dx$, con $R(x)$ polinomio di grado inferiore a quello di $D(x)$.

Il numeratore è la derivata del denominatore

Abbiamo già visto che

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln\left| f(x) \right| + c,$$

ossia l'integrale indefinito di una funzione fratta in cui il numeratore è la derivata del denominatore è uguale al logaritmo del valore assoluto del denominatore.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int \frac{6x-2}{3x^2-2x-1}\, dx$.

Osserviamo che $D[3x^2 - 2x - 1] = 6x - 2$, quindi:

$$\int \frac{6x-2}{3x^2-2x-1}\, dx = \ln\left| 3x^2 - 2x - 1 \right| + c.$$

Il denominatore è di primo grado: $\int \frac{1}{ax+b}\,dx$

Anche l'integrale $\int \frac{1}{ax+b}\,dx$, con $a \neq 0$, in cui la frazione algebrica ha il denominatore di primo grado, può essere ricondotto al caso in cui il numeratore è la derivata del denominatore.

Infatti, basta moltiplicare la frazione per $\frac{a}{a}$ e applicare la seconda proprietà di linearità:

a è la derivata di $ax + b$

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{a}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c.$$

ESEMPIO

Calcoliamo $\int \frac{1}{3x-2}\,dx$.

$$\int \frac{1}{3x-2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x-2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x-2| + c$$

Il denominatore è di secondo grado: $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx$

Per calcolare l'integrale

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx, \quad \text{con } a \neq 0,$$

si utilizzano metodi risolutivi diversi a seconda del segno del discriminante del denominatore $\Delta = b^2 - 4ac$.

Il discriminante è positivo: $\Delta > 0$

ESEMPIO

Calcoliamo $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx$.

Il discriminante del denominatore è: $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$.

Essendo il discriminante positivo, il denominatore può essere scomposto nel prodotto di due binomi di primo grado, cioè:

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2),$$

dove $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$ sono le soluzioni di $x^2 - x - 2 = 0$.

La frazione $\dfrac{5x-1}{x^2-x-2}$ può essere pensata come somma di due frazioni aventi per denominatori i fattori trovati, ossia:

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2},$$ con A e B costanti da determinare.

Calcoliamo la somma delle due frazioni:

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax - 2A + Bx + B}{x^2-x-2} = \frac{(A+B)x - 2A + B}{x^2-x-2}.$$

L'uguaglianza

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{(A+B)x - 2A + B}{x^2-x-2}$$

Se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ammette le soluzioni $x = x_1$ e $x = x_2$, allora:

$$ax^2 + bx + c = \\ = a(x - x_1)(x - x_2).$$

è valida, per $x \neq -1 \ \wedge \ x \neq 2$, soltanto se i numeratori sono polinomi identici. Quindi scriviamo e risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ -2A + B = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B = 5 - A \\ -2A + 5 - A = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \end{cases}$$

Possiamo dunque scrivere:

$$\frac{5x - 1}{x^2 - x - 2} = \frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 2}, \text{ quindi:}$$

$$\int \frac{5x - 1}{x^2 - x - 2}\, dx = \int \left(\frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 2} \right) dx =$$

$$= 2 \int \frac{1}{x + 1}\, dx + 3 \int \frac{1}{x - 2}\, dx = 2 \ln |x + 1| + 3 \ln |x - 2| + c.$$

● Il principio di identità dei polinomi afferma che se due polinomi nelle stesse variabili, non nulli e scritti in forma ridotta, assumono valori uguali per tutti i valori attribuiti alle variabili, allora sono identici.

In generale, se $\Delta > 0$:

- si scompone il denominatore: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)\,(x - x_2)$;
- si scrive la frazione data come somma di frazioni con denominatore di primo grado:

$$\frac{px + q}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}\right);$$

- si calcola la somma delle due frazioni al secondo membro;
- si determinano i valori di A e B risolvendo il sistema le cui equazioni si ottengono uguagliando fra loro rispettivamente i coefficienti della x e i termini noti;
- si risolve l'integrale $\frac{1}{a}\int\left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}\right)dx$.

Il discriminante è nullo: $\Delta = 0$

ESEMPIO

1. Calcoliamo $\int \frac{1}{9x^2 + 6x + 1}\,dx$.

Il discriminante del denominatore è $\frac{\Delta}{4} = 9 - 9 = 0$, possiamo quindi scrivere: $9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$. Si ha allora:

$$\int \frac{1}{9x^2 + 6x + 1}\,dx = \int \frac{1}{(3x + 1)^2}\,dx = \int (3x + 1)^{-2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int 3\,(3x + 1)^{-2}\,dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3x + 1)} + c.$$

2. Calcoliamo $\int \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 9}\,dx$.

Essendo $D\,[x^2 - 6x + 9] = 2x - 6$, si ha:

$$\int \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 9}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 9}\,dx = \frac{1}{2}\ln (x - 3)^2 + c =$$

$$= \ln|\,x - 3\,| + c.$$

Si può risolvere l'integrale anche così:

$$\int \frac{x-3}{(x-3)^2}\,dx =$$
$$= \int \frac{1}{x-3}\,dx =$$
$$= \ln|x-3| + c.$$

3. Calcoliamo $\int \frac{2x-3}{x^2-4x+4}\,dx$.

Essendo $D[x^2-4x+4] = 2x-4$, togliamo e aggiungiamo 1 al numeratore per ottenere:

$$\int \frac{2x-3-1+1}{x^2-4x+4}\,dx = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2-4x+4}\,dx =$$
$$= \ln(x-2)^2 + \int (x-2)^{-2}\,dx = 2\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + c.$$

In generale, se $\Delta = 0$:

- si scompone il denominatore $ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$;
- si scrive $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{px+q}{(x-x_1)^2}\,dx$;
- se $p = 0$ oppure $px+q$ è la derivata del denominatore, il calcolo dell'integrale è immediato;
- se non si verificano le condizioni precedenti, si cerca, con passaggi opportuni, di decomporre l'integrale in modo da ottenerle.

Il discriminante è negativo: $\Delta < 0$

Esaminiamo due casi.

1. Il numeratore è di grado zero, ossia l'integrale è del tipo:

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\, dx, \quad \text{con } a \neq 0.$$

Formula completamento del quadrato

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

dove: $\Delta = b^2 - 4ac$

ESEMPIO

Calcoliamo $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$.

Il discriminante del denominatore è $\Delta = -4 < 0$.
Cerchiamo di ricondurre l'integrale al modello:

$$\int \frac{f'(x)}{k^2 + [f(x)]^2} dx = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{f(x)}{k} + c.$$

Scriviamo il denominatore nella forma $[f(x)]^2 + k^2$ con il metodo del completamento del quadrato:

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 - 1 + 2 = (x+1)^2 + 1.$$

L'integrale dato diventa:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx.$$

Utilizzando il modello, abbiamo $f(x) = x + 1$, $k = 1$ e $f'(x) = 1$, quindi:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{1}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{1} + c = \operatorname{arctg}(x+1) + c.$$

In generale, per calcolare $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$ se $\Delta < 0$:

- si raccoglie il coefficiente di x^2: $\frac{1}{a}\int \frac{1}{x^2+mx+n}\,dx$;
- si scrive il denominatore nella forma: $(x+h)^2+k^2$;
- si calcola l'integrale $\frac{1}{a}\int \frac{1}{(x+h)^2+k^2}\,dx = \frac{1}{ak}\operatorname{arctg}\frac{x+h}{k} + c$.

2. Il numeratore è un polinomio di primo grado, cioè l'integrale è del tipo:

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx, \quad \text{con } a \neq 0 \text{ e } p \neq 0.$$

ESEMPIO

Calcoliamo $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+x+1}\,dx$.

Il denominatore ha $\Delta = -3 < 0$.

Trasformiamo il numeratore in modo da farvi figurare la derivata del denominatore, ossia $2x+1$:

$$\int \frac{x+3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+3)}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+5}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{5}{x^2+x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Calcoliamo separatamente i due integrali:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \ln\left|\, x^2+x+1 \,\right| + c;$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c,$$ applicando lo stesso metodo dell'esempio precedente.

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx =$
$= \ln\left|\, f(x) \,\right| + c$

Quindi:

$$\int \frac{x+3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

In generale, per calcolare $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx$, con $a \neq 0$, $p \neq 0$ e $\Delta < 0$:

- si opera sul numeratore per farvi figurare la derivata del denominatore;
- si scrive l'integrale come somma di due integrali:

$$r\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + s\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx;$$

- si calcola il primo integrale ricordando che $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\left| f(x) \right| + c$, quindi:

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln\left| ax^2+bx+c \right| + c_1;$$

- si calcola il secondo integrale con il metodo già visto;
- si sommano i risultati ottenuti.

Il denominatore è di grado superiore al secondo

Quando il denominatore è di grado superiore al secondo, occorre, se è possibile, scomporlo in fattori e scrivere la frazione algebrica come somma di frazioni con denominatori di primo e secondo grado, riconducendosi così al calcolo di integrali dei tipi descritti in precedenza.

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\int \frac{x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2} dx$.

Scomponiamo il denominatore $P(x)$ utilizzando la regola di Ruffini.

Poiché $P(1) = 0$, il polinomio $x - 1$ è divisore di $P(x)$.

Eseguiamo la divisione utilizzando la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Quindi $P(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 2)$.

Il trinomio $x^2 + 2x + 2$ ha discriminante $\Delta = -4 < 0$ ed è perciò irriducibile.

Scriviamo la frazione algebrica iniziale come somma di due frazioni algebriche con denominatori rispettivamente $x-1$ e x^2+2x+2, cioè:

$$\frac{x^2+5x-1}{x^3+x^2-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2},$$ dove A, B e C rappresentano numeri reali.

Determiniamo il valore delle costanti A, B e C. Sommiamo le frazioni al secondo membro:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}=\frac{A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2x+2)}=\frac{Ax^2+2Ax+2A+Bx^2+Cx-Bx-C}{x^3+x^2-2}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(2A-B+C)x+2A-C}{x^3+x^2-2}.$$

Affinché l'uguaglianza

$$\frac{x^2+5x-1}{x^3+x^2-2}=\frac{(A+B)x^2+(2A-B+C)x+2A-C}{x^3+x^2-2}$$

sia un'identità, dobbiamo porre:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B+C=5 \\ 2A-C=-1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, otteniamo $A=1$, $B=0$, $C=3$.

In conclusione, vale l'uguaglianza

$$\frac{x^2+5x-1}{x^3+x^2-2} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x^2+2x+2},$$

che permette di calcolare l'integrale dato:

$$\int \frac{x^2+5x-1}{x^3+x^2-2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x^2+2x+2}\right)dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= \ln|x-1| + 3\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \ln|x-1| + 3\,\mathrm{arctg}(x+1) + c.$$

Osservazione. Nella trasformazione della frazione algebrica iniziale nella somma di due o più frazioni si procede diversamente a seconda di come è scomposto il denominatore.

Vediamo tre esempi:

- $\dfrac{4x}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-3};$
- $\dfrac{2x+3}{(x-1)(x+2)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{(x+2)^2};$
- $\dfrac{6x-1}{(x-2)^3} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{(x-2)^2} + \dfrac{C}{(x-2)^3}.$

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Nella coppia di funzioni $y = x - x^2 - x^3$ e $y = 1 - 2x - 3x^2$, una delle due è una primitiva dell'altra. Determiniamo quale e scriviamo la relazione che lega le due funzioni mediante un integrale indefinito.

Calcoliamo la derivata delle due funzioni:

$$D[x - x^2 - x^3] = 1 - 2x - 3x^2,$$
$$D[1 - 2x - 3x^2] = -2 - 6x.$$

Osserviamo che la derivata della prima funzione è uguale alla seconda funzione: $y = x - x^2 - x^3$ è una primitiva di $y = 1 - 2x - 3x^2$. Scriviamo:

$$\int (1 - 2x - 3x^2)\, dx = x - x^2 - x^3 + c.$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \text{con } \alpha \neq -1; \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo gli integrali:

a) $\displaystyle\int\left(x^4 + 2x - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^2} + 3\right)dx$; **b)** $\displaystyle\int \frac{x^2 - 5\sqrt[3]{x} + 4}{x^3}\,dx$.

---

a) Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int\left(x^4 + 2x - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^2} + 3\right)dx = \int x^4 dx + 2\int x\,dx - \int\sqrt[3]{x^2}\,dx + \int\frac{1}{x^2}dx + 3\int dx.$$

Scriviamo il reciproco come potenza di x a esponente negativo e la radice come potenza di x a esponente razionale:

$$\int x^4 dx + 2\int x\,dx - \int x^{\frac{2}{3}}\,dx + \int x^{-2}dx + 3\int dx =$$

Applichiamo la formula per l'integrazione delle potenze di x:

$$= \frac{x^{4+1}}{4+1} + 2\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3x + c = \frac{x^5}{5} + x^2 - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - x^{-1} + 3x + c =$$

$$= \frac{x^5}{5} + x^2 - \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x} + 3x + c.$$

b) Poiché il denominatore della frazione è un monomio, scomponiamo la frazione in frazioni più semplici e applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int \frac{x^2 - 5\sqrt[3]{x} + 4}{x^3}\,dx = \int \frac{x^2}{x^3}\,dx - 5\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^3}\,dx + 4\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - 5\int x^{-\frac{8}{3}}\,dx + 4\int x^{-3}\,dx =$$

$$= \ln|x| - 5\frac{x^{-\frac{8}{3}+1}}{-\frac{8}{3}+1} + 4\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = \ln|x| + 3x^{-\frac{5}{3}} - 2x^{-2} + c =$$

$$= \ln|x| + \frac{3}{x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^2} + c.$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c; \qquad \int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\cdot a^x + c.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo gli integrali:

a) $\int (2e^x + 3\cdot 5^x)\,dx$; **b)** $\int \frac{10^{x-1}}{5^x}\,dx$.

a) Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int (2e^x + 3\cdot 5^x)\,dx = 2\int e^x\,dx + 3\int 5^x\,dx.$$

Applichiamo le formule degli integrali delle funzioni esponenziali:

$$2\int e^x\,dx + 3\int 5^x\,dx = 2e^x + 3\frac{1}{\ln 5}\cdot 5^x + c = 2e^x + \frac{3}{\ln 5}\cdot 5^x + c.$$

b) In questo caso occorre semplificare la frazione integranda in modo da ricondurci a un unico esponenziale:

$$\int \frac{10^{x-1}}{5^x}\,dx = \int \frac{10^x}{5^x}\cdot 10^{-1}\,dx = \int \left(\frac{10}{5}\right)^x \cdot \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10}\int 2^x\,dx = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\ln 2}\cdot 2^x + c.$$

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c; \qquad \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c;$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c; \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\int \left(1 + 2 \operatorname{sen} x - \cos x - \frac{4}{\operatorname{sen}^2 x}\right) dx$.

Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int \left(1 + 2 \operatorname{sen} x - \cos x - \frac{4}{\operatorname{sen}^2 x}\right) dx = \int 1 dx + 2\int \operatorname{sen} x \, dx - \int \cos x \, dx - 4\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx =$$

Applichiamo le formule degli integrali delle funzioni goniometriche:

$$= x + 2 \cdot (-\cos x) - \operatorname{sen} x - 4(-\operatorname{cotg} x) + c = x - 2\cos x - \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{cotg} x + c.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + c = -\arccos x + c;$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arccotg} x + c.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo gli integrali:

a) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{5}{1+x^2} \right) dx$; **b)** $\int \frac{6x^2}{1+x^2}\,dx$.

a) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{5}{1+x^2} \right) dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 5\int \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

Applichiamo le formule degli integrali delle funzioni goniometriche inverse:

$$2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 5\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2 \operatorname{arcsen} x + 5 \operatorname{arctg} x + c.$$

b) $\int \frac{6x^2}{1+x^2}\,dx = 6\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx.$

Ora possiamo spezzare la frazione integranda nella somma di due frazioni di cui l'integrale è noto:

$$6\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = 6\int \frac{x^2+1}{1+x^2}\,dx - 6\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = 6\int dx - 6 \operatorname{arctg} x + c = 6(x - \operatorname{arctg} x) + c.$$

$$\int [f(x)]^{\alpha} f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ con } \alpha \neq -1$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\int 3x^2 (x^3 - 2)^4 dx$.

Osserviamo che $D[x^3 - 2] = 3x^2$.

Possiamo applicare la formula $\int [f(x)]^{\alpha} f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, ponendo $f(x) = x^3 - 2$ e $\alpha = 4$:

$$\int (x^3 - 2)^4 \cdot 3x^2\,dx = \frac{(x^3 - 2)^{4+1}}{4+1} + c = \frac{(x^3 - 2)^5}{5} + c.$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\int \frac{12x}{2x^2+1}\,dx$.

Osserviamo che il numeratore è un multiplo della derivata del denominatore:

$$D[2x^2+1] = 4x.$$

Applichiamo la seconda proprietà di linearità e la regola $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$:

$$\int \frac{12x}{2x^2+1}\,dx = 3\int \frac{4x}{2x^2+1}\,dx = 3\ln(2x^2+1) + c.$$

$$\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c; \qquad \int f'(x)\,a^{f(x)}\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\int e^{x^2-x}(4x-2)\,dx$.

Raccogliamo 2 e applichiamo la seconda proprietà di linearità:

$$\int e^{x^2-x}(4x-2)\,dx = 2\int e^{x^2-x}(2x-1)\,dx.$$

Applichiamo la regola $\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$, essendo $\mathrm{D}\,[x^2-x] = 2x-1$:

$$2\int e^{x^2-x}(2x-1)\,dx = 2e^{x^2-x} + c.$$

$$\int f'(x)\,\mathrm{sen}\,f(x)\,dx = -\cos f(x) + c; \qquad \int f'(x)\cos f(x)\,dx = \mathrm{sen}\,f(x) + c;$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \mathrm{tg}\,f(x) + c; \qquad \int \frac{f'(x)}{\mathrm{sen}^2 f(x)}\,dx = -\mathrm{cotg}\,f(x) + c.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\ln x}{x}\,dx$.

Scriviamo l'integrale nella forma:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{sen}\ln x\,dx.$$

Il fattore $\dfrac{1}{x}$ è la derivata dell'argomento del seno, cioè di $\ln x$.

Applichiamo la regola $\int f'(x)\,\mathrm{sen}\,f(x)\,dx = -\cos f(x) + c$:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{sen}\ln x\,dx = -\cos\ln x + c.$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} f(x) + c; \qquad \int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \operatorname{arctg} f(x) + c.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\displaystyle\int \frac{1}{x + x\ln^2 x}\,dx$.

Raccogliendo x al denominatore, l'integrale diventa: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\ln^2 x}\,dx$.

Essendo $D[\ln x] = \dfrac{1}{x}$, applichiamo la regola $\displaystyle\int f'(x)\frac{1}{1+f^2(x)}\,dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$:

$$\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\ln^2 x}\,dx = \operatorname{arctg}\ln x + c.$$

$$\boxed{\int f(x) = \int f\left[g(t)\right] g'(t)\,dt}$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo per sostituzione l'integrale $\int \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$.

Poniamo $t = \sqrt{x}$, da cui $x = t^2$.

Calcoliamo il differenziale di x e sostituiamo:

$$dx = 2t\,dt \quad \rightarrow \quad \int \frac{1}{2t(1+t^2)} 2t\,dt = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} t + c.$$

Sostituiamo, nella primitiva trovata, $\sqrt{x}$ a t:

$$\operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c \quad \rightarrow \quad \int \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\displaystyle\int \frac{2}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$.

Poniamo $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, con $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, da cui:

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \quad \to \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Sostituiamo:

$$\int \frac{2}{1+\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{2}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = 4\int \frac{\cancel{1+t^2}}{1+t^2+2t} \cdot \frac{1}{\cancel{1+t^2}}\,dt =$$

$$= 4\int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = 4\int (t+1)^{-2}\,dt = \frac{-4}{t+1} + c = \frac{-4}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1} + c.$$

Osservazione. In tutti i casi come quello precedente, in cui *la funzione integranda contiene soltanto la funzione seno o la funzione coseno*, si ricorre alle formule parametriche:

$$\boldsymbol{\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{con } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.}$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo l'integrale $\int \frac{2\,\mathrm{tg}^3 x + 2\,\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}\, x + 5}\, dx$.

Poniamo $\mathrm{tg}\, x = z$ e utilizziamo in modo abbreviato il metodo della sostituzione calcolando i differenziali di ciascun membro senza ricavare la variabile x in funzione di z:

$$(1 + \mathrm{tg}^2 x)\, dx = dz.$$

Sostituiamo:

$$\int \frac{2\,\mathrm{tg}^3 x + 2\,\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}\, x + 5}\, dx = 2\int \frac{\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}\, x + 5}(\mathrm{tg}^2 x + 1)\, dx = 2\int \frac{z}{z + 5}\, dz = 2\int \frac{z + 5 - 5}{z + 5}\, dz =$$

$$= 2\int 1\, dz - 10\int \frac{1}{z + 5}\, dz = 2z - 10 \ln|z + 5| + c = 2\,\mathrm{tg}\, x - 10 \ln|\mathrm{tg}\, x + 5| + c.$$

Gli integrali del tipo $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

295 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

Poniamo $x = \operatorname{sen} t$, con $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ per l'invertibilità della funzione (il dominio di $\sqrt{1 - x^2}$ è $[-1; 1]$, cioè il codominio della funzione seno). Differenziando: $dx = \cos t\, dt$. Sostituiamo:

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t\, dt = \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt,$$

poiché $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, allora $\cos t \geq 0$, e quindi $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$.

Utilizziamo la formula di bisezione $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ per $\alpha = 2t$ ed eleviamo al quadrato:

$$\int \cos^2 t \, dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + c.$$

Usiamo la formula di duplicazione $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$:

$$\int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \cos t + c.$$

Essendo $x = \operatorname{sen} t$, si ha $t = \operatorname{arcsen} x$, quindi:

$$\boldsymbol{\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c.}$$

Osservazione. In generale si può ottenere, ripetendo lo stesso procedimento, ma ponendo $x = a \operatorname{sen} t$:

$$\boldsymbol{\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + c, \text{ con } a > 0.}$$

Gli integrali del tipo $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx$ e $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo l'integrale $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Poniamo $t = x + \sqrt{x^2+1}$, da cui si ricava:

$$t - x = \sqrt{x^2+1} \quad \rightarrow \quad t^2 + \cancel{x^2} - 2tx = 1 + \cancel{x^2} \quad \rightarrow \quad 2tx = t^2 - 1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{t^2-1}{2t}.$$

Sostituiamo l'espressione di x:

$$\sqrt{x^2+1} = t - x \quad \rightarrow \quad \sqrt{x^2+1} = t - \frac{t^2-1}{2t} \quad \rightarrow \quad \sqrt{x^2+1} = \frac{t^2+1}{2t}.$$

Differenziamo l'espressione di x:

$$dx = \frac{2t \cdot 2t - 2(t^2-1)}{4t^2}\,dt \quad \rightarrow \quad dx = \frac{2t^2+2}{4t^2}\,dt \quad \rightarrow \quad dx = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt.$$

Sostituiamo nell'integrale:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{\dfrac{t^2+1}{2t}} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \int \frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|\,t\,| + c =$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c.$$

Osservazione. In generale, gli integrali dei seguenti tipi,

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2 \pm \boldsymbol{a}^2}}\,\boldsymbol{dx}, \quad \int \sqrt{\boldsymbol{x}^2 \pm \boldsymbol{a}^2}\,\boldsymbol{dx},$$

si risolvono ponendo $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x} + \sqrt{\boldsymbol{x}^2 \pm \boldsymbol{a}^2}$.

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo con l'integrazione per parti: a) $\int x^2 \ln x \, dx$; b) $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$.

a) Come funzione $g'(x)$ scegliamo $y = x^2$ perché sappiamo calcolarne l'integrale.

Sappiamo che $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$. Trascurando la costante c, $g(x) = \frac{x^3}{3}$. Applichiamo la formula:

$$\int x^2 \ln x \, dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c.$$

b) Applichiamo la formula di integrazione per parti, ponendo: $g'(x) = e^x$ e $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Poiché $\int e^x dx = e^x + c$, allora $g(x) = e^x$ e $f'(x) = \cos x$. Pertanto:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Applichiamo a $\int e^x \cos x \, dx$ ancora l'integrazione per parti, con $g'(x) = e^x$ e $f(x) = \cos x$:

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x - \int -e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Quindi:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Portando a primo membro $-\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$ e sommando otteniamo:

$$2\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x + c_1 \;\rightarrow\; \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x}{2} + c, \text{ dove } c = \frac{c_1}{2}.$$

In conclusione: $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + c.$

Il denominatore è di primo grado

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\int \frac{2x^2 + 5x + 1}{2x + 1}\,dx$.

Poiché il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore, dividiamo il polinomio $2x^2 + 5x + 1$ per il polinomio $2x + 1$:

$$
\begin{array}{rrr|l}
2x^2 & +5x & +1 & 2x+1 \\ \cline{4-4}
-2x^2 & -x & & x+2 \\ \cline{1-3}
 & 4x & +1 & \\
 & -4x & -2 & \\ \cline{2-3}
 & & -1 &
\end{array}
$$

Il quoziente della divisione è $Q(x) = x + 2$ e il resto $R(x) = -1$, quindi:

$$\frac{2x^2 + 5x + 1}{2x + 1} = x + 2 + \frac{-1}{2x + 1}.$$

L'integrale diventa:

$$\int \frac{2x^2 + 5x + 1}{2x + 1}\,dx = \int \left(x + 2 - \frac{1}{2x + 1}\right) dx = \int (x + 2)\,dx - \int \frac{1}{2x + 1}\,dx =$$

$$= \int (x + 2)\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x + 1}\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}\ln|2x + 1| + c.$$

Il denominatore è di secondo grado

Il discriminante è positivo: $\Delta > 0$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\int \frac{x-1}{x^2+5x+6}dx$.

Calcoliamo il discriminante del denominatore: $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$.

Le soluzioni dell'equazione associata al denominatore sono: $x_1 = -2$ e $x_2 = -3$.

Il denominatore si scompone nel prodotto di due binomi: $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$.

Scriviamo $\frac{x-1}{x^2+5x+6}$ come somma di due frazioni aventi come denominatori i fattori trovati:

$$\frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}, \quad \text{dove } A \text{ e } B \text{ sono numeri reali.}$$

Svolgiamo i calcoli a secondo membro:

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{Ax + 3A + Bx + 2B}{x^2+5x+6} = \frac{(A+B)x + 3A + 2B}{x^2+5x+6}.$$

Affinché l'uguaglianza

$$\frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{(A+B)x+3A+2B}{x^2+5x+6}$$

sia un'identità, dobbiamo porre:

$$\begin{cases} A+B=1 & \text{uguaglianza dei coefficienti della } x \\ 3A+2B=-1 & \text{uguaglianza dei termini noti} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, otteniamo $A = -3$ e $B = 4$, per cui l'integrale diventa:

$$\int \frac{x-1}{x^2+5x+6}\,dx = \int\left(\frac{-3}{x+2} + \frac{4}{x+3}\right)dx = -3\int\frac{1}{x+2}\,dx + 4\int\frac{1}{x+3}\,dx =$$

$$= -3\ln|x+2| + 4\ln|x+3| + c.$$

Il discriminante è nullo: $\Delta = 0$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\int \frac{x+5}{x^2+6x+9}\,dx$.

Calcoliamo il discriminante del denominatore: $\frac{\Delta}{4} = 9 - 9 = 0$.

Riscriviamo il numeratore in modo che compaia la derivata del denominatore.

Essendo $D[x^2+6x+9] = 2x+6$, moltiplichiamo e dividiamo il numeratore per 2 e poi aggiungiamo e togliamo 6:

$$\int \frac{x+5}{x^2+6x+9}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10+6-6}{x^2+6x+9}\,dx.$$

Possiamo così decomporre l'integrale nella somma:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+9}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{4}{x^2+6x+9}\,dx.$$

Nel primo integrale applichiamo la regola $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|\,f(x)\,| + c$, mentre nel secondo, essendo $\Delta = 0$, possiamo riscrivere il denominatore come quadrato di binomio. Otteniamo così:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+9}\,dx + 2\int (x+3)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x+3)^2 - \frac{2}{x+3} + c = \ln|\,x+3\,| - \frac{2}{x+3} + c.$$

Il discriminante è negativo, $\Delta < 0$, e il numeratore è di grado zero

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$.

Calcoliamo il discriminante del denominatore: $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$.

Cerchiamo di ricondurre l'integrale al modello: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{k^2+[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{f(x)}{k} + c$.

Per poter scrivere $x^2 + x + 1$ nella forma $[f(x)]^2 + k^2$, utilizziamo il metodo del completamento del quadrato. Possiamo pensare che x^2 e x siano, rispettivamente, il quadrato di x e il doppio prodotto di x per un altro numero, ossia:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + 1.$$

Il fattore $\frac{1}{2}$ ci conduce al binomio $x + \frac{1}{2}$, il cui quadrato è: $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$. Pertanto:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

quindi:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx.$$

Utilizzando il modello iniziale, abbiamo $f(x) = x + \frac{1}{2}$, $k = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $f'(x) = 1$, quindi:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

Il discriminante è negativo, $\Delta < 0$,

e il numeratore è di grado maggiore di zero

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx$.

Calcoliamo il discriminante del denominatore: $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$.

Trasformiamo il numeratore in modo da poter ottenere la derivata del denominatore:

$$D[x^2 - 4x + 5] = 2x - 4.$$

Moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-4x+5}\,dx.$$

Aggiungiamo e togliamo 4 al numeratore e scriviamo la frazione come somma di due frazioni:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4+4-2}{x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x-4}{x^2-4x+5} + \frac{4-2}{x^2-4x+5}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{2x-4}{x^2-4x+5}+\frac{2}{x^2-4x+5}\right)dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx+\int\frac{1}{x^2-4x+5}\,dx.$$

Calcoliamo separatamente i due integrali; osserviamo che $x^2-4x+5>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, poiché $\Delta<0$.

$$\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx = \ln(x^2-4x+5)+c,$$

$$\int\frac{1}{x^2-4x+5}\,dx = \int\frac{1}{x^2-4x+4-4+5}\,dx = \int\frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}(x-2)+c.$$

Otteniamo:

$$\int\frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+\operatorname{arctg}(x-2)+c.$$